Олимпиада 14 апреля 2011 года

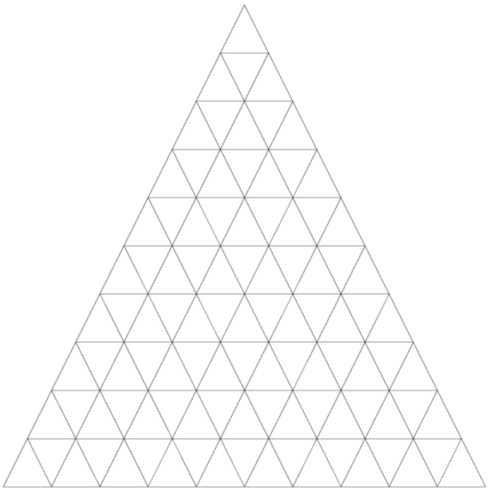
На титульном листе, пожалуйста, укажите: регистрационный номер, фамилию, имя, а также нарисуйте и заполните следующую таблицу:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Ответ										

Больше ничего на титульном листе не пишите. Задачи, для которых не заполнена графа «ответ» в таблице, проверяться не будут. Решения разных задач, пожалуйста, записывайте на разных листах. Во избежание путаницы пишите регистрационный номер на каждом листе. **Удачи!**

Задача 1. Найдите количество локальных экстремумов функции $y = f(f(x))$, если $f(x) = x^3 - 3x + 1$.

Задача 2. Какое максимальное количество комнат можно обойти в треугольном лабиринте на рисунке, если из любой комнаты можно переходить в любую соседнюю, однако запрещено посещать любую комнату дважды?



Задача 3. Пусть O – центр правильного 2011- угольника $A_1 \dots A_{2011}$, а X – произвольная точка. Во сколько раз длина суммы векторов, соединяющих точку X с вершинами многоугольника, больше длины вектора, соединяющего точку X с точкой O?

Задача 4. На плоскости задано множество точек $A_n(x_n; y_n)$ $(n = 1, 2, \dots,$ 2009), где $x_n = \left(1 - \frac{n}{2010}\right) \cdot \cos\frac{\pi n}{502}$; $y_n = \left(1 - \frac{n}{2010}\right) \cdot \sin\frac{\pi n}{502}$. Назовём точку

$A_j(x_j; y_j)$ доминирующей над точкой $A_i(x_i; y_i)$, если $x_j \geq x_i$ и $y_j \leq y_i$ для $j \neq i$. Укажите количество точек, для которых нет доминирующих.

Задача 5. Найдите сумму коэффициентов при нечётных степенях ряда Тейлора функции $f(x) = \frac{2x+3}{x^2-2x+2}$.

Задача 6. В треугольнике ABC длины сторон равны $|AB| = l_1$, $|BC| = l_2$, $|AC| = l$. На стороне AC отмечена точка M, так что $|AM| = x$. Обозначим угол $AMB = \theta(x)$. Найдите $\int_0^l \cos\theta(x)dx$, если $l_1 = 64$ и $l_2 = 81$.

Задача 7. Найдите наименьшее значение выражения $16\frac{x^3}{y} + \frac{y^3}{x} - \sqrt{xy}$.

Задача 8. Найдите $\int_0^2 \min_{y\in[0;2]}(3x + |3x - y|)dx$ (запись $\min_{t\in[a;b]} f(t)$ означает наименьшее значение выражения $f(t)$ на отрезке $[a; b]$).

Задача 9. Найдите площадь выпуклого многоугольника на комплексной плоскости, вершинами которого являются корни уравнения $1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 = 0$.

Задача 10. Последовательность $\{x_n\}$ задана соотношением: $x_n(1 - x_{n-1}) = x_{n-1}$ $(n \geq 1)$. Известно, что $x_{2011} = 2011$. Найдите x_0.