1. Дорога из пункта A в пункт B поднимается на протяжении $3-\sqrt{2}$ км, спускается на протяжении $2+\sqrt{3}$ км, а на остальной части горизонтальна. Путник прошёл из A в B и обратно за 4 часа. В гору он шёл со скоростью 3 км/час, под гору — со скоростью 6 км/час, а по ровной дороге со скоростью 4 км/час. Чему равна длина дороги (в километрах) из A в B?

Ответ: 8.

Решение. Обозначим длины поднимающегося, спускающегося и горизонтального участков через x, y и z соотвественно. Условие задачи означает, что

$$\frac{x+y}{3}+\frac{x+y}{6}+\frac{2z}{4}=4.$$

Преобразуя левую часть, получаем:

$$\frac{1}{2}(x+y+z)=4,$$

откуда $x+y+z=8$.

2. В правильный 2011-угольник со стороной 1 вписана окружность, и около него описана окружность. Найдите площадь кольца между этими окружностями.

Ответ: $\pi/4$.

Решение. Обозначим через R и r радиусы вписанной и описанной окружностей соответственно. Тогда площадь кольца равна $S=\pi(R^2-r^2)$. С другой стороны, из теоремы Пифагора следует, что $R^2-r^2=(1/2)^2$. Отсюда получаем $S=\pi/4$.

3. В выпуклом n-угольнике никакие три диагонали не пересекаются в одной точке. Чему равно количество точек пересечения диагоналей?

Ответ: $\dfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}$.

Решение. Любая четвёрка вершин многоугольника определяет ровно одну пару пересекающихся диагоналей с вершинами в этих точках. Поэтому искомое количество точек пересечения равно $\binom{n}{4}$.

4. Найдите 300-ю цифру после десятичной точки числа $\sqrt[3]{0.999\ldots9}$ (100 девяток).

Ответ: 5.

Решение. Запишем формулу Тейлора в нуле для функции $f(x)=(1-x)^{\frac{1}{3}}$ с остаточным члено в форме Лагранжа:

$$(1-x)^{\frac{1}{3}}=1-\frac{1}{3}x-\frac{1}{9}x^2-\frac{5}{81}(1-\xi)^{-\frac{8}{3}}x^3 \quad (0<\xi<x).$$

Подставив в неё значение $x = 10^{-100}$, находим, что сумма (без учёта остаточного члена) равна $0.99\ldots966\ldots655\ldots$ (после десятичной точки идут 100 девяток, затем 100 шестёрок, а дальше — пятёрки). Легко оценить остаточный член. Он по абсолютной величине меньше 10^{-301}, поэтому не влияет на первые 300 цифр после десятичной точки.

5. Вычислите сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+2)!}\,.$$

Ответ: $3 - e$.

Решение. Воспользуемеся тем, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e \quad \text{и} \quad \frac{n}{(n+2)!} = \frac{1}{(n+1)!} - 2\frac{1}{(n+2)!}.$$

Имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+2)!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!} - 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)!} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} - 2\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n!} = (e-2) - 2(e-2.5) = 3 - e.$$

6. Когда я перехожу улицу в неположенном месте, вероятность попасть под машину равна 0.01. Какова вероятность попасть под машину, если я буду переходить улицу в неположенном месте ежедневно в течение 100 дней?

Ответ: $1 - 1/e$

Решение. Вероятность не попасть под машину при однократном переходе улицы составляет 0.99, а при стократном — 0.99^{100}. Значение этого выражение близко к пределу

$$\lim_{x \to 0} (1-x)^{\frac{1}{x}} = 1/e.$$

поскольку является значением функции $(1-x)^{\frac{1}{x}}$ при малом значении $x = 0.01$. Таким образом, искомая вероятность равна приблизительно $1 - 1/e$.

Докажем, что погрешность полученной оценки не превосходит требуемой величины 0.01. Заметим, что функция $(1-x)^{\frac{1}{x}}$ монотонно убывает, а функция $(1-x)^{\frac{1}{x}+1}$ монотонно возрастает на промежутке $(0,1)$, и при этом они имеют общий предел, равный $1/e$. Значит,

$$0.99^{101} < 1/e < 0.99^{100},$$

откуда

$$0.99^{100} - 1/e < 0.99^{100} - 0.99^{101} = 0.99^{100} \cdot 0.01 < 0.01.$$

7. Найдите такую матрицу A, что

$$A^{2011} = \begin{pmatrix} -4021 & -4022 \\ 4022 & 4023 \end{pmatrix}$$

Ответ: $\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Решение. Приведём матрицу, стоящую в правой части равенства, к жордановой нормальной форме. Мы получим жорданову клетку: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ и матрицу перехода $\begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{4022} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ Корень 2011-й степени из жордановой клетки извлекается однозначно: $\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2011} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Возвращаясь к исходному базису, получаем ответ: $\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

8. Найдите значение интеграла с ошибкой, не превышающей 20%.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^{100} x dx.$$

Ответ: 0.25.

Решение. Воспользуемся следующими приближёнными формулами, верными при малых значениях x:

$$\begin{aligned} \cos x &\sim 1 - \frac{x^2}{2}; \\ \ln(1+x) &\sim x; \\ e^x &\sim 1 + x, \end{aligned}$$

а также формулой для Гауссова интеграла:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

Имеем,

$$\int_0^{\pi} \sin^{100} x dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^{100} x dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{100 \ln \cos x} dx \sim \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{-50x^2} dx =$$

$$= \frac{1}{5\sqrt{2}} \int_{-5\sqrt{2}\pi/2}^{5\sqrt{2}\pi} e^{-t^2} dt \sim \frac{1}{5\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{2\pi}}{10} = 0.250\ldots$$

Прежде чем оценить погрешность докажем, что функция

$$f(x) = \frac{\cos x}{e^{-x^2/2}}$$

убывает при $x > 0$. Для этого найдём её производную:

$$f'(x) = \frac{x \cos x - \sin x}{e^{-x^2/2}}$$

Условие $f'(x) < 0$ равносильно $x < \tan x$, которое выполняется при положительных x. Поскольку $f(0) = 1$, как следствие получаем, что $\cos x < e^{x^2/2}$ при $0 < x < \pi/2$.

Теперь оценим погрешность. Она возникает в результате двух округлений. Начнём со второго, которое состоит в замене области интегрирования с конечной на бесконечную. Мы добавляем слагаемое

$$2 \int_{5\sqrt{2}\pi/2}^{\infty} e^{-t^2} dt < 2 \int_{10}^{\infty} e^{-t} dt < 2e^{-10} < 2^{-9} < 0.002,$$

что составляет заведомо меньше 1% от ответа.

Первое округление состоит в замене $\cos^{100} x$ на e^{-50x^2}. Оценим погрешности отдельно в окрестности нуля и вне её. В качестве окрестности нуля выберем интервал $(-0.3, 0.3)$.

Вне окрестности имеем

$$2 \int_{0.3}^{\pi/2} e^{-50x^2} dx < (\pi - 0.6) e^{-4.5} = 0.0282\ldots$$

что составляет чуть меньше $11,5\%$.

Внутри окрестности замена $\cos^{100} x$ на e^{-50x^2} даёт относительную погрешность не превышающую

$$1 - \frac{\cos^{100} 0.3}{e^{50 \cdot 0.3^2}} < 0.075$$

Значит, и относительная погрешность интеграла по этому интервалу также не превосходит 7.5%.

Итого, погрешность не превосходит $1\% + 11.5\% + 7.5\% = 20\%$.