

Условия

1. На одном первобытном базаре шкура мамонта обменивалась на две шкуры саблезубого тигра, а юбка из перьев павлина — на три каменных копья. На другом базаре, расположенном в одном дне пути от первого, шкура мамонта обменивалась на три юбки из павлина, а шкура тигра — на четыре копья. Все обмены можно осуществлять в обе стороны. Охотник принёс на первый базар шкуру мамонта и хочет выменять её на четыре тигровых шкуры. Сможет ли он это сделать за 33 дня?

2. Найдите $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{1/\ln(x)}$.

3. Определите, является ли функция

$$\ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

чётной или нечётной (или ни чётной, ни нечётной).

4. Вася спускается на парашюте с постоянной скоростью v , а его друг Миша катается на колесе обозрения, которое крутится с постоянной скоростью (точка, из которой прыгнул Вася, находится выше верхней точки колеса обозрения). В момент приземления Васи кабинка, в которой катался Миша, находилась в нижней точке (на уровне земли). Известно, что пока Вася спускался, друзья оказывались на одной и той же высоте ровно 4 раза (считая момент Васиного приземления). Найдите вертикальную составляющую скорости Миши в тот момент, когда они с Васей впервые оказались на одной высоте (мальчиков можно считать точками).

5. Сколько решений имеет уравнение $x^2 = 2^x$?

6. Даны две произвольные ненулевые матрицы A и B второго порядка. Докажите, что для некоторой матрицы C выполняется условие: $ACB \neq 0$.

7. Чему равно минимальное значение выражения

$$\sqrt{(x - 1960)^2 + y^2} + \sqrt{x^2 + (y - 441)^2} ?$$

8. Найдите ненулевой многочлен с целыми коэффициентами, корнем которого является число

$$\sqrt[5]{\sqrt{2} + 1} - \sqrt[5]{\sqrt{2} - 1}.$$

9. На отрезке $[0, 1]$ случайным образом выбираются два числа. Какова вероятность того, что первое число, возведённое в квадрат, больше, чем второе число?
10. Два цилиндра радиуса 1 расположены в пространстве так, что их оси пересекаются под прямым углом. Найдите объём пересечения цилиндров.
11. Профессор сформулировал n утверждений A_1, A_2, \dots, A_n . Он задаёт своим аспирантам темы диссертационных работ: “из A_i следует A_j ”. Диссертация не должна быть непосредственным логическим следствием диссертаций, заданных ранее. Какое максимальное число аспирантов может быть у профессора?
12. Пусть $f(x, y)$ — бесконечно дифференцируемая функция от двух переменных с локальным минимумом в нуле. Других критических точек у неё нет. Верно ли, что этот минимум глобальный? (Точка называется *критической* если в ней обе частные производные $\partial f/\partial x$ и $\partial f/\partial y$ обращаются в нуль.)