Решения

1. **Ответ:** Неверно.

   Выясним, какой будет концентрация после сливания двух растворов объёмов V_1 и V_2 и концентраций c_1 и c_2 соответственно. Очевидно, количество сахара будет равно $c_1V_1 + c_2V_2$, а объём $V_1 + V_2$. Поэтому искомая концентрация равна $c = c_1 \cdot \frac{V_1}{V_1+V_2} + c_2 \cdot \frac{V_2}{V_1+V_2}$ (геометрически этот результат может быть интерпретирован так: точка на координатной прямой с координатой c делит отрезок $[c_1, c_2]$ в отношении $V_2 : V_1$). Таким образом, варьируя объёмы можно добиться, чтобы результат оказался любым числом между c_1 и c_2.

   Вернёмся к исходной задаче. Подберём сначала концентрации удовлетворяющие условиям задачи и дополнительному условию, что концентрация в третьем стакане больше, чем во втором. Далее, если объёмы первого и четвёртого растворов будут значительно меньше, чем третьего и второго соответственно, то концентрация результата сливания первого и третьего растворов будет близка к исходной концентрации третьего раствора, а концентрация результата сливания второго и четвёртого будет близка к исходной концентрации второго. Теперь легко построить искомый контрпример:

   1 стакан — 1 л, 60%, 2 стакан — 3 л, 50%, 3 стакан — 3 л, 20%, 4 стакан — 1 л, 10%. При сливании 1 и 3 стаканов получаем 4 л, 30%, а при сливании 2 и 4 стаканов — 4 л, 40%.

2. **Ответ:** $4ab$.

   Проведем дополнительно две прямые: $x = 2a$ и $y = 2b$. Вместе с координатынми осями они разбивают круг на 9 частей: центральную, 4 угловых (их площади равны из симметрии), и еще две пары — (верхняя, нижняя), и (правая, левая), площади которых попарно равны. Из этих равенств площадей следует, что искомое выражение равно площади центральной части.

3. **Ответ:** 16 литров.

   Так как величина E равна количеству километров которые проедет автомобиль при постоянной скорости v, затратив один литр топлива, то обратная величина $\frac{1}{E}$ равна количеству литров топлива

которые затратит автомобиль на один километр пути при постоянной скорости v. За время T весь путь при постоянной скорости составит $S = vT$. Следовательно, расход топлива за время T при этих условиях равен
$$\frac{1}{E}\,S = \frac{vT}{E(v)}\,.$$
По условию задачи скорость не является постоянной величиной, поэтому полный расход топлива определяется соответствующим интегралом:

$$\int\limits_0^T \frac{v(t)\,dt}{E(v(t))} = \int\limits_0^1 \frac{168v(t)\,dt}{\sqrt{v^3(t)}} = 168\int\limits_0^1 \frac{dt}{\sqrt{v(t)}} =$$
$$168\int\limits_0^1 \frac{dt}{\sqrt{144\sqrt[4]{t}}} = 14\frac{8}{7}\,t^{\frac{7}{8}}\Big|_0^1 = 16 \text{ (л)}.$$

4. **Ответ:** Последовательность сходится при любых указанных значениях параметра и предел равен $\sqrt[m]{a}$

   Рекуррентное соотношение говорит, что x_{n+1} является средним арифметическим m чисел, из которых все, кроме последнего, равны x_n, а последнее равно $\dfrac{a}{x_n^{m-1}}$. Среднее геометрическое этих чисел равно $\sqrt[m]{a}$, поэтому из неравенства Коши о среднем арифметическом и среднем геометрическом следует, что все члены последовательности, начиная со второго, не меньше $\sqrt[m]{a}$.

   Так как в наборе чисел все, кроме последнего, не меньше их среднего геометрического, то последнее число не больше его. Значит, среднее арифметическое x_{n+1} чисел набора не больше x_n (при $n \geq 2$). Итак, последовательность монотонно невозрастающая и ограничена снизу. По теореме Больцано-Вейерштрасса, она всегда сходится.

   Обозначив предел последовательности через x и переходя к пределу в рекуррентном соотношении, получаем
$$x = \frac{(m-1)x + \dfrac{a}{x^{m-1}}}{m},$$

откуда $x = \sqrt[m]{a}$.

Замечание. Мы получили способ приближённого вычисления корня m-й степени, если разрешено использовать лишь четыре арифметических действия.

5. Расчертим пол на единичные квадратики и отметим те из них, которые стоят на нечетных местах в нечетных рядах. Заметим, что каждая плитка 1×4 при любом расположении будет закрывать четное число отмеченных нами квадратиков (два или ни одного), а плитка 2×2 всегда закрывает ровно один отмеченный квадратик. Таким образом, если плитки целиком закрывают пол, то количество плиток 1×2 имеет ту же четность, что и общее число отмеченных квадратиков. Поэтому, если количество плиток 2×2 изменилось на нечетное число, то вновь покрыть пол не удастся.

6. **Ответ:** $\frac{4}{3}\pi R^3 \simeq 33510321$.

   Обозначим искомое количество через N. Для каждой целой точки, расположенной внутри рассматриваемого шара, рассмотрим единичный кубик с центром в этой точке. Объединение этих кубиков содержит внутри себя шар радиуса $R - \sqrt{3}/2$ и содержится внутри шара радиуса $R - \sqrt{3}/2$. Объёмы этих шаров равны $V_- = \frac{4}{3}\pi(R-\sqrt{3}/2)^3$ и $V_+\frac{4}{3}\pi(R+\sqrt{3}/2)^3$ соответственно, а объём каждого кубика равен 1. Поэтому $V_- < N < V_+$. В качестве искомого приближения можно взять $V = \frac{4}{3}\pi R^3$. Округляя до целого значения, получаем ответ 33510321. Оценим погрешность верхней оценки:

$$\frac{V_+}{V} = \frac{\left(R + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3}{R^3} = \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2R}\right)^3 = \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{400}\right)^3 <$$
$$= 1 + \frac{3}{200} + \frac{3}{200^2} + \frac{1}{200^3} < 1 + \frac{1}{100}\left(\frac{3}{2} + \frac{3}{400} + \frac{1}{80000}\right) < 1.02.$$

   Погрешность нижней оценки оценивается аналогично.

7. Заметим, что для многочлена $P_n(x)$ чётной степени с положительным старшим коэффициентом $\lim\limits_{n\to\pm\infty} P_n(x) = +\infty$. Поэтому такой многочлен достигает наименьшего значения в некоторой точке

(это следует из теоремы о существовании наибольшего и наименьшего значения непрерывной функции на отрезке). Пусть x_0 — точка глобального минимума многочлена, тогда в этой точке $P_n'(x_0) = 0$ и $P_n''(x) \geq 0$. Но по условию задачи $P_n(x) \geq P_n''(x)$ при всех x. Следовательно, $P_n(x) \geq P_n(x_0) > P_n''(x_0) \geq 0$ для всех x.

8. **Ответ:** Веня получит 10$, Беня —1$, Женя ничего не получит.

   Проведём анализ с конца.

   Если перед ходом игрока остаётся один или два камня, он получает 10 долларов. Если же перед его ходом, остаётся 3 камня, то он ничего не получит. Если игрок видит перед собой 4 камня, то ему выгодней взять один, и в результате получить 1 доллар, чем взяв два, остаться в результате без выигрыша. Таким образом, игрок, оставляющий после своего хода 4 камня, побеждает. Аналогично, игрок оставляющий после своего хода 7 камней, оказывается вторым, как и оставляющий 3 камня. Значит, при выработке стратегии как для выигрыша, так и (в случае невозможности выигрыша) для получения второго места, можно мысленно исключить из рассмотрения 4 камня. Иными словами, при выбрасывани 4 камней из начальной позиции, исход игры не изменится. Следовательно, исход игры зависит только от остатка при делении на 4 исходного количества камней. Если остаток 1 или 2, то побеждает Веня. Если остаток 0, то побеждает Беня. Если остаток 3, то побеждает Женя.

9. Умножим первый столбец (содержащий разряд сотен) на 100, второй столбец (содержащий разряд десятков) — на 10, и сложим их с третьим столбцом (содержащим разряд единиц). Значение определителя при этом не изменится, при этом все элементы третьего столбца будут делиться на 17. Значит, определитель делится на 17.

10. **Ответ:** Можно.

    Выберем на трёх рёбрах куба, выходящих из одной вершины по точке: на первом противоположный конец ребра, на втором — середину, а на третьем — точку, отстоящую от исходной вершины на расстояние одной четверти ребра. Проведём плоскость через эти три точки (она содержит одну вершину куба), а также параллельные ей плоскости, проходящие через остальные вершины. Они будут искомыми. Докажем это. Рассмотрим ось, проходящую через исходную точку и перпендикулярную рассматриваемой плоскости, и введём на этой оси координату. За начало выберем исходную вершину, а за единицу длины — расстояние от неё до пересечения с построенной плоскостью. Проекции векторов v_1, v_2 и v_3, выходящих по рёбрам куба из этой вершины на ось будут равны 1, 2 и 4 соответственно. Тогда радиус-векторы вершин куба суть: 0, v_1, v_2, v_1+v_2, v_3, v_1+v_3, v_2+v_3 и $v_1+v_2+v_3$. Легко убедиться, что координаты проекций этих векторов на ось равны $0, 1, \ldots, 7$. А это и означает, что расстояния между соседними построенными плоскостями равны.

11. Примем за единицу максимальную величину силы трения между крошкой и поверхностью стола. Тогда $|F_i| > 1$ для $i = 1, 2, \ldots, N$. Пусть сила, с которой N муравьев действуют на крошку равна $\vec{S} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots + \vec{F}_N$. По условию задачи $\vec{S} \leq 1$. Покажем, что найдется такой вектор $\vec{F}_j$, что $|\vec{S} - \vec{F}_j| \geq |\vec{F}_j|$. Доказательство проведём от противного. Предположим, что $|\vec{S} - \vec{F}_j| < |\vec{F}_j|$ для всех j. Тогда $|\vec{S} - \vec{F}_j|^2 < |\vec{F}_j|^2$, или $(\vec{S} - \vec{F}_j, \vec{S} - \vec{F}_j) < (\vec{F}_j, \vec{F}_j)$. Следовательно, $\vec{S}^2 - 2(\vec{S}, \vec{F}_j) < 0$ для всех j. Просуммировав все эти неравенства, получаем:

$$0 > \sum_{j=1}^{N}(\vec{S}^2 - 2(\vec{S}, \vec{F}_j)) = N\vec{S}^2 - 2\left(\vec{S}, \sum_{j=1}^{N}\vec{F}_j\right) = \\ = N\vec{S}^2 - 2(\vec{S}, \vec{S}) = (N-2)\vec{S}^2$$

Однако, $N - 2$ и $\vec{S}^2$ неотрицательные величины. Мы пришли к противоречию.

12. **Ответ:** 46 месяцев.

Решение. Назовём *абсолютной справедливостью* ситуацию, когда зарплаты всех сотрудников равны, и *относительной справедливостью* ситуацию, когда самая высокая зарплата отличается от самой низкой не более чем на один доллар.

Сначала покажем, что может случиться так, что менее чем за 46 месяцев добиться абсолютной справедливости невозможно. Пусть изначально зарплаты распределены так: 13 сотрудников получают 10 долларов, один — 9, а один работает бесплатно. Тогда, после n-го месяца сотрудник, имевший вначале нулевую зарплату, будет получать не более n долларов, значит, в предположении, что зарплаты были уравнены, сумма всех зарплат составит не более $15n$ долларов. С другой стороны, она составит $139 + 11n$ долларов, поскольку изначально она была равна 139, и каждый месяц прибавлялось по 11. Из неравенства $139 + 11n \leq 15n$ получаем, $n \geq 35$. С другой стороны, для того, чтобы все зарплаты были равны, необходимо, чтобы их сумма делилась на 15. Нетрудно проверить, что $139 + 11n$ делится на 15 тогда и только тогда, когда $n \equiv 1 \pmod{15}$. С учётом условия $n \geq 35$, получаем минимально возможное значение $n = 46$.

Теперь докажем, что относительной справедливости можно добиться в любом случае не более чем за 32 месяца, а из состояния относительной справедливости можно добиться абсолютной справедливости не более, чем за 14 месяцев.

Повышать зарплаты ежемесячно будем одиннадцати сотрудникам с самыми низкими зарплатами (если несколько претендентов получают одинаковую зарплату, то можно выбирать любого.)

Начнём со второй части. Пусть имеется состояние относительной справедливости. Очевидно, что если мы будем действовать по описанному алгоритму (ежемесячно повышать 11 самых низких зарплат), то состояние относительной справедливости не будет нарушаться. Кроме того, в один из пятнадцати последовательных месяцев суммарная зарплата всех сотрудников будет делиться на 15. (Это следует из того, что среди n последовательных членов арифметической прогрессии, разность которой взаимно проста с n, найдётся один, делящийся на n). Легко доказать, что если в состоянии относительной справедливости сумма зарплат делится на 15, то значит, наступила абсолютная справедливость. Следовательно, из состояния относительной справедливости не более чем за 14 месяцев можно прийти к абсолютной справедливости.

Теперь перейдём к первой части — как из произвольного состояния добиться относительной справедливости.

Заметим, что одновременное понижение зарплаты на один доллар всем сотрудникам не влияет на состояние справедливости в этот момент и в дальнейшем, поэтому вместо повышения зарплаты на доллар одиннадцати сотрудникам можно рассматривать такое же понижение зарплаты четырём остальным. Будем использовать в дальнейшем обе эти операции.

Как мы это уже делали ранее, будем ежемесячно повышать 11 самых низких зарплат. Однако, если при этом окажется, что нужно повышать зарплату хотя бы одному из сотрудников, уже получающему 10 долларов, то вместо повышения зарплат, наоборот, понизим на доллар 4 самые высокие зарплаты. Очевидно, что если так произойдёт, то все эти четыре зарплаты перед понижением составляли по 10 долларов. Таким образом, на протяжении всего процесса максимальная зарплата не превысит 10 долларов, а минимальная не будет уменьшаться.

Сотрудников, получающих 9 или 10 долларов, будем называть *высокооплачиваемыми*, а остальных — *низкооплачиваемыми*. Очевидно, что сотрудник, перешедший в разряд высокооплачиваемых, останется таковым и в дальнейшем.

Рассмотрим два случая.

Случай А. Предположим, нам ни разу (вплоть до наступления относительной справедливости) не приходилось понижать зарплат. Поскольку зарплата каждого сотрудника повышалась не более 10 раз, то суммарное повышение составило не более 150 долларов. Значит, прошло не более 13 месяцев, так как каждый месяц суммарное повышение составляло 11 долларов, а значит за 14 месяцев оно составило бы 154 доллара. *Конец случая А.*

Случай Б. Предположим, что до наступления относительной справедливости понижать зарплаты хотя бы один раз приходилось. (Напомним, что понижение могло коснуться только тех, чья зарплата достигла 10 долларов.) Докажем, что не более чем через 32 месяца все сотрудники станут высокооплачиваемыми. Для этого оценим сверху количество повышений и понижений зарплат по отдельности.

Начнём с повышений. Сначала докажем по индукции, что *после k-го повышения (при $k \leq 9$) зарплата каждого сотрудника будет составлять не менее k долларов.* (Это, в частности, будет означать, что не позднее чем 9-го повышения наступит относительная справедливость, то есть повышений было не более 9). База ($k = 0$) следует из условия. Пусть утверждение верно для $k-1$. Докажем, что оно верно для k. Рассмотрим отдельно два случая: когда первое понижение произошло до k-го повышения (случай α), и когда оно произошло после (случай β).

Случай α. Хотя бы одно понижение произошло до k-го повышения. Тогда, как мы уже заметили выше, на момент первого понижения, а значит, и к моменту k-го повышения, имеется не менее 4 высокооплачиваемых сотрудников. Но тогда k-е повышение должно коснуться всех низкооплачиваемых сотрудников, так как их не более 11. Отсюда следует утверждение индукции. *Конец случая α.*

Случай β. К моменту k-го повышения ни разу не проводилось понижений зарплат. Рассмотрим группу сотрудников, получающих после $(k-1)$-го повышения $k-1$ доллар. Нам нужно доказать, что k-е повышение коснётся их всех. Предположим противное, что k-е повышение кого-то из них не коснётся. Это означает, что всего в рассматриваемой группе имеется более 11 сотрудников. Заметим, что если в дальнейшем зарплата какого-нибудь сотрудника X из этой группы будет больше, чем зарплата любого другого сотрудника Y (не обязательно из этой группы), то не более, чем на один доллар. (Действительно, чтобы эта разница стала больше доллара, нужно чтобы в какой-то момент X получил повышение, а Y, получающий на тот момент меньше — нет, вопреки нашему алгоритму.)

Рассмотрим момент, когда впервые потребовалось осуществить понижение зарплат. На этот момент количество сотрудников, получающих меньше 10 долларов, будет меньше 11. Значит, в рассматриваемой группе кто-то получает 10 долларов. А следовательно, каждый из 15 сотрудников получает не менее 9 долларов. Тем самым, относительная справедливость уже наступила, и понижать зарплаты не требуется. Полученное противоречие с предположением случая Б доказывает шаг индукции. *Конец случая β.*

Итак, утверждение, выделенное курсивом, доказано, а вместе с ним и оценка сверху на число повышений — 9.

Оценим теперь количество понижений. Переставим местами операции: сначала сделаем все повышения (которых, как мы доказали, было не более 9), а потом — понижения. На окончательный результат это не повлияет, хотя в промежуточные моменты некоторые зарплаты могут и превысить 10 долларов.

Рассмотрим момент, когда все зарплаты будут не ниже 9 долларов (при новом порядке операций). По доказанному это произойдёт не позднее, чем после 9 повышений. Суммарное повышение зарплат сверх 10 долларов составляет не больше $10 \cdot 9 = 90$ долларов, поскольку при каждом повышении было не более 10 сотрудников, которые получали такое повышение (подумайте самостоятельно, почему такими не могут быть все 11 получающих повышение сотрудников), и было не более 9 таких операций. За каждое понижение мы суммарно понижаем зарплату на 4 доллара, поэтому, не более, чем за 23 понижения мы добьёмся, чтобы все зарплаты были не выше 10 долларов. При этом мы уже знаем, что они не ниже 9 долларов. Значит, относительная справедливость наступила, и нам для этого потребовалось не более $9 + 23 = 32$ месяцев. *Конец случая Б.*

Критерии проверки

Мы использовали следующие оценки:
$+$ (p) — задача решена верно
$+.$(pt) — в решении задачи имеется мелкие недочёты
$\pm$ (pm) — задача в целом решена, но решение содержит ошибки или пробелы
$+/2$ (p2) — задача решена "наполовину"
$\mp$ (mp) — задача не решена, но имеется верный подход к решению
$-.$ (mt) — задача не решена, но имеются некоторые разумные соображения
$-$ (m) — представленное решение неверно
0 — задача не решалась.

Ниже приводятся некоторые типичные случаи, встречавшиеся в работах, и указано, как они оценивались жюри.

Задача 1.

$\pm$

Верно написана формула концентрации смеси, написано, какое должно быть неравенство, и сказано, что подобрать концентрации и объёмы для контрпримера возможно, но контрпример явно не приведён.

Задача 3.

$\pm$

Правильно записан интеграл, но ошибка при его вычислении.

Задача 4.

$-.$

Если найден предел, но не доказано существование.

$\mp$

Имеется решение в случае $m = 2$

$\mp$

Доказана монотонность в частном случае ($x > \sqrt[m]{a}$)

Задача 6

$+$

Если в оценке погрешности отбрасываются малые члены без аккуратного выписывания неравенств, то оценка не снижается.

$\pm$

Подсчёт правильный, но нет оценки погрешности.
+/2
Идея подсчёта со сферой правильная, но реализована
с ошибкой (например, взят неверный радиус). $\mp$
Есть идея подсчёта объёма сферы. $-$
ответ без обоснования или подсчёт с помощью компьютерной программы

Задача 7.

$\pm$

К точке локального применяется правильное рассуждение,
но не доказано, почему существует локальный минимум
с отрицательным значением.

Задача 8.

$\pm$

Правильное решение, но ошибка при вычислении остатка при делении 2010 на 4 из-за чего получен неверный ответ.

$\mp$

Идея разбора с конца или цикла.

Задача 9.

$\pm$

Используется некоторый (верный) критерий делимости на 17 без доказательства

Задача 10.

$\mp$

Показано, как провести семейство четвёрок плоскостей через вершины одной грани, далее ссылка на соображения непрерывности.

Задача 12.

$\mp$

Правильный ответ и пример распределений зарплат, приводящий к нему.

$\mp$

Доказано, что стратегия повышать зарплаты самым низкооплачиваемым сотрудникам правильная.